1. Contar puntos muestrales

Si se tiene una cantidad pequeña de puntos muestrales, como en los casos anteriores, tiene sentido contarlos .ª mano". Sin embargo podría presentarse un espacio muestral que contenga muchos mas, así que debemos conocer formas de contarlos de forma mas "sencilla".

Teorema: (Regla mn) Con m elementos $a_1, a_2, ..., a_m$ y n elementos $b_1, b_2, ..., b_n$ es posible formar $mn = mxn$ pares que contienen un elemento de cada grupo.

Ejemplo. Un experimento consiste en lanzar un par de dados y observar los números de la cara superior. Encuentre el número de puntos muestrales en S.

Solución.
Es claro que cada evento sencillo de este experimento, será un par que contiene un número del primer dado y un número del segundo dado, por lo que podemos utilizar la regla mn. Como cada dado tiene 6 caras, entonces la cantidad de puntos muestrales es $6x6 = 36$.

Ejemplo. Se quiere registrar la fecha de nacimiento de 20 personas elegidas de forma aleatoria. Suponiendo que cada conjunto posible tiene la misma probabilidad, determine el número de puntos muestrales en S.

Solución.
Cada persona, tiene (en general) 365 días distintos para haber nacido. Eso es cierto para las 20 personas. Si pensamos en el experimento con dos personas, un punto muestral sería una dupla en la cual la primera posición contiene el primer día de nacimiento, y la segunda posición el segundo día. Esto es claro que sigue la norma de la regla mn. Si agregamos una tercera persona, ahora el punto muestral sería una tripleta donde ahora se agrega una posición para el tercer cumpleaños, luego la cantidad de puntos muestrales sería 365 x 365 x 365. Generalizando, entonces la cantidad de puntos muestrales es $(365)^{20}$.

Definición: Un arreglo ordenado de r objetos distintos recibe el nombre de permutación. La cantidad de maneras de ordenar n objetos diferentes tomando r a la vez se representa mediante P_r^n.

Teorema:

$$P_r^n = n(n-1)(n-2)...(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ejemplo. Volvemos al ejemplo anterior. Calcule la probabilidad de que las 20 personas tengan días de nacimiento distintos.

Solución.
Una forma sencilla de pensar que las veinte personas tengan fechas de nacimiento distinto es decir:

La primera persona tiene 365 días para haber nacido, como nacio alguno de esos días, la segunda persona tiene 364 días para haber nacido, ya que no pudo nacer el mismo día que la primera. La tercera persona tiene entonces 363 días para haber nacido, y así se sigue el razonamiento. Fijense también, que esto corresponde a un arreglo ordenado de los 20 días, por lo tanto se puede pensar como una permutación. Luego

$$P(evento) = \frac{P_{20}^{365}}{(365)^{20}} = \frac{365 \text{ x } 364 \text{ x } 363 \text{ x} ... \text{ x } 346}{(365)^{20}}$$

<u>Ejemplo</u>. De una urna que contiene el nombre 30 empleados se eligen aleatoriamente, sin reemplazo, los nombres de 3. El primero recibe 100 dólares, el segundo 50 y el tercero 25. ¿Cuántos puntos muestrales hay en este experimento?

<u>Solución</u>.
El primer detalle importante es que en la selección no hay reemplazo, es decir, que luego de que se saca un nombre, este no vuelve a entrar dentro de la urna. Es claro que después de que se saca el primer nombre, solo quedan 29 dentro de la urna. El otro detalle importante es que el orden en que se sacan no es indiferente, ya que el primero que se saca, gana un premio distinto al que ganan los otros. Por esto se puede decir que la cantidad de puntos muestrales es P_3^{30}.

<u>Teorema</u>: La cantidad de formas de dividir n objetos distintos en k grupos que contengan $n_1, n_2, ..., n_k$ objetos, en forma respectiva, donde cada objeto figuna en exactamente un grupo y $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, es

$$N = \begin{pmatrix} & & n & \\ n_1 & n_2 & ... & n_k \end{pmatrix} = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}$$

<u>Ejemplo</u>. Se quieren repartir 50 estudiantes en 3 secciones de probabilidades de forma aleatoria. La primera sección tiene 20 cupos, y las otras 15 cada una. Calcule la cantidad de puntos muestrales en el experimento. ¿Cuál es la probabilidad de que 3 amigos queden en la sección 1? ¿Es igual a la probabilidad de que queden juntos en la sección 3?

<u>Solución</u>.

Es claro que para encontrar la cantidad de puntos muestrales debemos usar el teorema anterior. Digamos que la cantidad de puntos muestrales es N, entonces

$$N = \begin{pmatrix} & 50 & \\ 20 & 15 & 15 \end{pmatrix} = \frac{50!}{20!15!15!}$$

Ahora supongamos que el evento A es que los tres amigos queden en la sección 1. Como esos tres estudiantes ya están en la sección 1, el problema se reduce a como ordenar a los estudiantes restantes en los cupos restantes por sección. Luego

$$P(A) = \frac{\begin{pmatrix} & 47 & \\ 17 & 15 & 15 \end{pmatrix}}{N} = 0{,}058$$

El evento B es que los tres amigos queden en la sección 3, nuevamente podemos razonar que como los 3 deben estar en la sección 3, entonces debemos repartir el resto en el resto de los cupos, por lo tanto:

$$P(A) = \frac{\begin{pmatrix} & 47 & \\ 20 & 15 & 13 \end{pmatrix}}{N} = 0{,}00178$$

Fijense que es menos probable que queden los 3 en la sección con menos cupos, a que queden en la que tienen mas cupos, aunque ambas son muy poco probables.

<u>Ejercicio</u>. Calcule cuál es la probabilidad de que 10 amigos queden juntos en la sección 2.

<u>Definición</u>: El número de combinaciones de n objetos tomados r a la vez es el número de subconjuntos de tamaño r que se pueden formar con n objetos. El número quedará expresado por C_r^n o $\binom{n}{r}$.

<u>Teorema</u>:

$$\binom{n}{r} = C_r^n = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

<u>Ejercicio</u>. Se sacan dos cartas de una bajara convencional de 52. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un as y una figura?

<u>Solución</u>.
Esta probabilidad se puede calcular como las otras, calculando casos positivos entre total de casos.

La cantidad de ases que se puden sacar son 4 (uno por cada pinta) y la cantidad de figuras son 12 (una J, una Q y una K por cada pinta). La cantidad de casos totales es de cuantas formas se pueden sacar dos cartas si se tienen 52, que es el combinatorio de 52 en 2, por lo tanto

$P(A) = \frac{4x12}{\binom{52}{2}}$.